9. Распределения случайных величин-2

9.1. Предварительные сведения

Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n).$$

Дискретные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{P}(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \mathbb{P}(\xi_1 = x_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\xi_n = x_n).$$

Абсолютно непрерывные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда

$$p_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot p_{\xi_n}(x_n).$$

Если ξ и η — величины с совместной плотностью $p_{\xi,\eta}(x,y)$, а B — борелевское множество, то

$$\mathbb{P}((\xi,\eta) \in B) = \int\int_B p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy.$$

В частности для борелевской функции $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F_{g(\xi,\eta)}(z) = \int\int_{\{g(x,y)<z\}} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy.$$

Для независимых величин ξ и η с плотностями p_ξ и p_η

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y) p_\eta(x-y)\,dy \text{ — свертка плотностей } p_\xi \text{ и } p_\eta.$$

9.2. Практическое занятие

1. Совместное распределение $p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_1 = i, \xi_2 = j)$ случайных величин ξ_1 и ξ_2 задано таблицей

$i \diagdown j$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/12$	$7/24$
1	$5/24$	$1/6$	$1/8$

Найти:

а) одномерные распределения $p_{i\cdot} = \mathbb{P}(\xi_1 = i)$, $p_{\cdot j} = \mathbb{P}(\xi_2 = j)$ и проверить, являются ли величины ξ_1 и ξ_2 независимыми;

б) совместное распределение $q_{ij} = \mathbb{P}(\eta_1 = i, \eta_2 = j)$ случайных величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1\xi_2$;

в) одномерные распределения $q_{i\cdot} = \mathbb{P}(\eta_1 = i)$, $q_{\cdot j} = \mathbb{P}(\eta_2 = j)$.

Ответ. а)

ξ_1	-1	1
$\mathbb{P}$	$1/2$	$1/2$

,

ξ_2	-1	0	1
$\mathbb{P}$	$1/3$	$1/4$	$5/12$

; ξ_1 и ξ_2 зависимы;
б) $q_{-2,1} = 1/8$, $q_{-1,0} = 1/12$, $q_{0,-1} = 1/2$, $q_{1,0} = 1/6$, $q_{2,1} = 1/8$, остальные $q_{ij} = 0$;
в)

η_1	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}$	$1/8$	$1/12$	$1/2$	$1/6$	$1/8$

,

η_2	-1	0	1
$\mathbb{P}$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

2. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathbb{P}(\xi = x_i) = \mathbb{P}(\eta = x_i) = p_i$. Найти $\mathbb{P}(\xi = \eta)$.
Ответ. $\sum\limits_i p_i^2$.

3. Величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти функцию распределения и плотность $\xi_1 + \xi_2$.
Ответ.

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ z^2/2, & 0 < z \le 1, \\ 1 - (2-z)^2/2, & 1 < z \le 2, \\ 1, & z > 2, \end{cases}$$

$$p_{\xi_1+\xi_2}(z) = \begin{cases} z, & 0 < z \le 1, \\ 2 - z, & 1 < z \le 2, \\ 0, & z \le 0 \text{ или } z > 2. \end{cases}$$

4. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайных величин $\eta = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\zeta = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.
Ответ. $F_\eta(x) = F^n(x)$, $F_\zeta(x) = 1 - (1 - F(x))^n$.

9.3. Домашнее задание

5. Пусть $\xi \sim \mathrm{Bin}(2, p)$, $\eta \sim \mathrm{Bin}(3, p)$. Найти распределение случайной величины $\xi\eta$, считая ξ и η независимыми.
Ответ.

$\xi\eta$	0	1	2	3	4	6
$\mathbb{P}$	$q^2 + q^3 - q^5$	$6p^2q^3$	$9p^3q^2$	$2p^4q$	$3p^4q$	p^5

6. Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, т. е. $p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Найти функцию распределения и плотность $\xi_1 + \xi_2$.
Ответ. $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$, $z > 0$; $p_{\xi_1+\xi_2}(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$, $z > 0$.
7. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти распределение $\xi_1 + \xi_2$.
Ответ. Распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.